



Early Journal Content on JSTOR, Free to Anyone in the World

This article is one of nearly 500,000 scholarly works digitized and made freely available to everyone in the world by JSTOR.

Known as the Early Journal Content, this set of works include research articles, news, letters, and other writings published in more than 200 of the oldest leading academic journals. The works date from the mid-seventeenth to the early twentieth centuries.

We encourage people to read and share the Early Journal Content openly and to tell others that this resource exists. People may post this content online or redistribute in any way for non-commercial purposes.

Read more about Early Journal Content at <http://about.jstor.org/participate-jstor/individuals/early-journal-content>.

JSTOR is a digital library of academic journals, books, and primary source objects. JSTOR helps people discover, use, and build upon a wide range of content through a powerful research and teaching platform, and preserves this content for future generations. JSTOR is part of ITHAKA, a not-for-profit organization that also includes Ithaka S+R and Portico. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

XXIX. De Polygonis Aread vel Perimetro maximis et minimis, inscriptis Circulo, vel Circulum circumscribentibus.
Auctore S. Horsley, LL.D. R. S. Sec.

Redde, May 19, 1775.

THEOREMA I. (TAB. IX.)

Si linea recta arcum circulem contingentibus duabus interceptum contingat, segmentum ejus, contingentibus primo positis interceptum, in contactus sui puncto vel æqualiter vel inæqualiter divisum est, prout arcus ipse circularis æqualiter vel inæqualiter in eodem puncto divisus est. Segmentaque arcus (inæqualiter scilicet divisi) et rectæ contingentis majora et minora ab iisdem sunt partibus mutui contactus.

ARCUM circulem AEC, contingentibus duabus, AB, CD, interceptum, recta BD in puncto E contingat. Recta vero BD contingentibus primo positis, AB, CD, in punctis B, D, occurrat. Dico rectam BD in puncto E vel æqualiter vel inæqualiter divisam, prout arcus AEC æqualiter vel inæqualiter in eodem puncto E divisus est. Primo puta arcum AC in puncto E æqualiter divisum. Dico igitur et rectam BD, in puncto E, bifariam secari. Circuli AEC centrum esto F. Jungantur FE, FB, FD, quarum

rum FB , FD , circuli peripheriæ in punctis G , H , occurrant. Rectæ FB , FD arcus AE , CE bifariam dividunt. Arcus igitur GE , HE , arcuum AE , CE semiffes. Æquales igitur GE , EH , propter AE , EC , ex hypothesi, æquales. Quare anguli BFE , DFE æquales. Æquales autem anguli BEF , DEF : rectus enim uterque. In triangulis igitur BFE , DFE , quæ latus commune habent EF , duo anguli BEF , BFE , duobus DEF , DFE , singuli singulis æquales. Reliqua igitur reliquis æqualia (per El. I. 26.). Quare $BE = ED$.
Q. E. D.

Jam vero puta arcum AC inæqualiter in E divisum, et segmentorum AE , CE , majus esse AE , CE minus. (fig. 2.) Dico rectam BD inæqualiter in puncto E divisam, segmentumque BE majus esse, DE minus. Jungantur enim ut prius FB , FE , FD , quarum FB , FD peripheriæ in punctis G , H , occurrant. Rectæ FB , FD , arcus AE , CE , bifariam dividunt. Arcus igitur GE , HE , arcuum AE , CE , semiffes. Cum igitur arcus AE , arcu CE major sit, arcus GE arcu HE major erit. Angulus igitur BFE angulo DFE major. Fiat angulus EFK angulo DFE æqualis. Quoniam angulus KFE angulo DFE æqualis est, nec non angulus rectus KEF , recto DEF æqualis; in triangulis EFK , EFD , quæ latus EF commune habent, anguli duo KFE , KEF , duobus DFE , DEF , singuli singulis æquales. Reliqua igitur reliquis æqualia. Latera igitur EK , ED , æqualia. Propter angulum vero EFK angulo EFB minorem, punctum K punctis, B , E , necessario interjacet. Recta igitur BE , rectâ KE major. Major itaque quam ED .
Q. E. D.

T H E O R E M A II.

Linea recta quæ arcum circularem contingentibus duabus interceptum in puncto medio contingit, et contingentibus primo positis hinc inde occurrit, minima est omnium quæ, eundem arcum contingentes, contingentibus primo positis intercipiuntur.

ARCUM circularem BED, contingentibus duabus AB, CD, interceptum recta AC in puncto E contingat, et contingentibus primo positis AB, CD, in punctis A, C, occurrat. Punctum E arcus BED medium esto. Dico rectam AC omnium minimam, quæ, arcum BED contingentes, contingentibus AB, CD, intercipiuntur. Sumatur enim in arcu BED punctum quodlibet F, et ducatur recta GH quæ circum in F contingat. Recta vero GH contingentibus AB, CD, in punctis G, H, occurrat. Dico rectam AC rectâ GH minorem. Si parallelæ sint contingentes AB, CD (fig. 1.) res manifesta est: parallelas enim AB, CD, recta GH oblique fecat, recta autem AC normaliter. Rectæ vero AB, CD, non sint parallelæ. (fig. 2. et 3.) Si recta AC non sit minor quam GH, aut æqualis erit, aut major. Sit primo æqualis. Arcus autem BD, inæqualiter in F divisi, segmentum majus esto BF. Rectæ igitur GH, inæqualiter in F divisæ, segmentum GF majus erit (per 1. hujus). Rectæ BA, DC, productæ occurrent; occurfus esto K: rectarum vero GH, AC, occurfus esto L. Junctâ BD, per H ducatur HM rectis BD, AC, parallela: et per G ducatur GN rectæ DK parallela, quæ rectæ AC in N occurrat.

Rectæ GF, GB, quæ circulum in punctis B, F, contingentes
 in puncto G conveniunt, æquales sunt. Pari ratione AE,
 AB, æquales. Recta igitur GF duabus AE, AG, simul
 sumptis æqualis est. Rursum rectæ HF, HD, quæ circu-
 lum in punctis F, D, contingentes in puncto H conve-
 niunt, æquales sunt. Pari ratione CD, CE, æquales. Recta
 igitur CD, vel CE, duabus FH, HC, simul sumptis æqualis.
 Tres igitur GF, FH, HC, simul sumptæ, tribus AG, AE, EC,
 simul sumptis æquales; id est, duæ GH, HC, simul sumptæ
 duabus AG, AC, simul sumptis. Rectæ autem GH, AC, ex
 hypothefi, æquales. Ablatis igitur GH, AC, æqualibus, re-
 linquuntur HC, AG, æquales. Propter rectas autem AC,
 MH, BD, parallelas, et triangulum BKD isosceles, æquales
 sunt CH, AM: quare AG, AM, æquales. Propter parallelas,
 autem AL, MH, rectæ GM, GH, in punctis A, L, similiter di-
 visæ sunt: bifariam autem GM in A: quare et GH bifariam
 in L: et propter GN, CD, parallelas, CN bifariam in L. Cum
 CL igitur semiffis fit rectæ CN, et CE semiffis rectæ CA, erit
 EL rectæ AN semiffis, five AN rectæ EL dupla. Rectâ au-
 tem GH æqualiter in L divisâ, cum ejusdem rectæ, in-
 æqualiter in F divisæ, segmentum GF majus est (per I. hu-
 jus), recta GF, rectis HF et duplæ FL simul sumptis æqua-
 lis est. Rectæ autem GF recta GB æqualis. Quare GB, five
 duæ GM, MB, simul sumptæ, duabus, HF et duplæ FL, simul
 sumptis, five duabus, HD et duplæ FL, simul sumptis,
 æquales. Et ablatis hinc inde MB, HD, æqualibus, re-
 linquetur GM æqualis duplæ FL, id est duplæ EL, id est,
 ex prius ostensis, rectæ AN. Propter æquales autem GA,
 AM, recta GM rectæ GA dupla est: et propter parallelas GN,

KC , triangula AKC , AGN similia: latera autem KA , KC æqualia: æqualia igitur GA , GN . Duæ igitur GA , GN , simul sumptæ, duplæ GA æquales sunt; id est, rectæ GM . Rectæ autem GM , AN ostensæ sunt æquales. Duæ igitur GA , GN , simul sumptæ, rectæ AN æquales sunt: duo nempe trianguli latera simul sumpta æqualia reliquo. Quod est absurdum. Non sunt igitur AC , GH , æquales. Dico neque majorem esse AC quam GH . Esto enim major AC , siquidem esse potest. Duæ GH , HC simul sumptæ duabus AG , AC simul sumptis, ut prius, æquales sunt. Cum igitur AC major sit quam GH , erit AG minor quam HC . Æquales autem HC , AM , ut prius. Ergo AG minor erit quam AM ; ac proinde, propter rectarum GM , GH , NC , similem in punctis A , L , divisionem, GL minor quam LH , et NL minor quam LC . Cum igitur CE semiffis est rectæ CA , et CL major quam semiffis rectæ CN , erit EL minor quam semiffis rectæ AN : five AN duplâ EL major. Porro cum rectæ GH inæqualiter in L divisæ, segmentum GL , ex ostensis, minus est, ejusdem autem rectæ inæqualiter in F divisæ segmentum GF majus, (per I. hujus) duæ, FH et dupla FL , simul sumptæ rectâ GF majores sunt, five æquali GB , five duabus GM , MB simul sumptis. Et æqualibus FH , MB hinc inde ablatis, relinquetur dupla FL rectâ GM major. Æquales autem LF , LE . Quare dupla EL rectâ GM major: et AN , quæ duplâ EL jam ostensa est major, rectâ GM multo major erit. Propter GA minorem vero quam AM , recta GM duplâ AG major. Æquales autem ut prius GA , GN . Dupla igitur GA , duabus GA , GN simul sumptis æqualis est. Recta igitur GM ,

duabus GA, GN simul sumptis major. Et proinde recta AN, quæ ostensa est major quem GM, duabus GA, GN, simul sumptis multo major. Trianguli igitur AGN latus AN duobus reliquis simul sumptis majus. Quod est absurdum. Recta igitur AC rectâ GH major non est. Sed nec æqualis. Minor igitur. Simili ratione et aliâ omni minor, quæ arcum BD contingens contingentibus primo positis AB, CD intercepta est. Omnium igitur minima. *Q. E. D.*

T H E O R E M A I I I .

*Polygonorum omnium, lateribus numero datis, datum circum-
lum circumscribentium, æquiangulum perimetro mini-
mum est.*

CIRCULUM ABCD circumscriptum puta polygono, quot volueris laterum, FGHKE, quod omnium quæ, æquali laterum numero, circa eundem circum scribi possunt, perimetrum minimam habeat. Dico polygonum FGHKE æquiangulum esse. Nam si æquiangulum non sit, necesse est ut duos aliquos angulos proximos inæquales habeat: nam si nullos proximos, omnino nullos; sed æquiangulum erit. Sunt igitur inæquales proximi duo anguli GFE, KEF. Latera vero GF, KE, quæ cum intermedio FE angulos illos complexa sunt, circum in A, D punctis contingant: et latus intermedium FE eundem in L contingat. Circuli centrum esto O. Jungantur OA, OL, OD. Anguli AFL, AOL simul sumpti duobus rectis æquales sunt, propter angulos ad A, L rectos. Similiter
anguli

anguli ΔEL , ΔOL simul sumpti duobus rectis æquales; propter angulos ad D et L rectos. Duo igitur ΔFL , ΔOL , simul sumpti, duobus ΔEL , ΔOL simul sumptis æquales. Inæqualibus igitur ΔFL , ΔEL hinc inde ablati, relinquuntur ΔOL , ΔOL inæquales. Arcus igitur AL , LD inæquales. Bifariam igitur secetur arcus ALD in M puncto, quod necessario à puncto L diversum erit. Per M ducatur recta quæ arcum AD contingat. Contingens per M contingentibus AF , DE in punctis N , P , occurrat. Recta NP rectâ FE minor erit (per præc). Quare et dupla rectæ NP duplâ rectæ FE minor. Sed propter $NM=NA$ et $PM=PD$, tres rectæ AN , DP , PN , simul sumptæ, duplæ rectæ NP æquales sunt. Et propter $FA=FL$, et $DE=EL$, tres AF , DE , FE , simul sumptæ, duplæ rectæ FE æquales sunt. Tres igitur AN , DP , PN simul sumptæ tribus AF , DE , FE , simul sumptis minores. Polygonum autem $NGHKP$, circulum $ABCD$ circumscribit, et latera numero totidem habet ac polygonum $FGHKE$; quod omnium quæ æquali laterum numero, circulum $ABCD$ circumscribunt, perimetro, ex hypothefi, minimum est. Perimeter igitur $FGHKEF$ perimetro $NGHKPN$ minor. Utrique auferatur pars communis $AGHKD$: relinquentur AF , DE , FE , reliquis AN , DP , PN , simul sumptæ simul sumptis, minores. Ast majores jam ostensæ sunt. Simul igitur majores et minores. Quod est absurdum. Non sunt igitur anguli GFE , KEF , inæquales, existente perimetro $FGHKEF$ minimâ. Similiter ostendetur, nec alios duos quosvis angulos proximos polygonum $FGHKE$ inæquales habere.

tur

Nullos igitur proximos inæquales habet. Omnino igitur nullos. Omnes igitur æquales. Æquiangulum igitur. *Q. E. D.*

THEOREMA IV.

Polygonorum omnium, lateribus numero datis, datum circulum circumscribentium, æquiangulum areâ minimum est.

PATET ex præcedente, cum area æqualis est rectangulo sub semiperimetro et circuli inscripti semidiametro.

THEOREMA V.

Polygonorum omnium, lateribus numero datis, dato circulo inscriptorum, æquilaterum perimetro maximum est.

CIRCULO ABCD inscriptum puta polygonum ABCDE, quot volueris laterum, quod omnium, quæ, æquali laterum numero, eidem circulo inscribi possunt, perimetrum maximam habeat. Dico polygonum ABCDE æquilaterum. Non enim. Duo igitur proxima quædam latera inæqualia habet: nam si nulla proxima, omnino nulla; sed æquilaterum erit; quod negasti. Inæqualia sunt latera proxima AB, AE. Propter rectas AB, AE inæquales, arcus AB, AE inæquales erunt. Bifariam igitur secetur arcus

BAE in puncto G, quod à puncto A diversum erit. Jungantur BG, EG. Circuli centrum esto F: juncta GF peripheriæ iterum in H occurrat. Denique jungantur BE, HA. Arcubus GB, GE æqualibus, semicirculis GBH, GEH, ablatiis, relinquuntur æquales BH, EH. Quare et anguli BGH, EGH, nec non BAH, EAH, æquales. Angulos igitur BGE, BAE, qui in eodem sunt segmento circulari, rectæ GH, AH, bifariam dividunt. Duæ igitur GB, GE, simul sumptæ ad rectam GH eandem proportionem habent, ac duæ BA, AE, simul sumptæ, ad rectam AH. (*Vide Demonstrationem prop. 94. Datorum EUCLIDIS*) In circulo autem ABCD, diameter GH, rectâ AH, major est. Duæ igitur GB, GE, simul sumptæ, duabus AB, AE, simul sumptis, majores. (per xiv. 5. Elem.). Polygonum autem GBCDE circulo ABCD inscriptum est, et latera numero totidem habet ac polygonum ABCDE; quod omnium quæ, æquali laterum numero, circulo ABCDE inscribi possunt, perimetro, ex hypothesi, maximum est. Perimeter igitur ABCDEA perimetro GBCDEG major. Utrique auferatur pars communis BCDE. Relinquuntur AB, AE, reliquis GB, GE, simul sumptæ simul sumptis, majores. Duæ autem GB, GE, duabus AB, AE, ostensæ sunt majores. Simul igitur majores et minores. Quod est absurdum. Non sunt igitur latera AB, AE, inæqualia. Simili modo ostendetur, de aliis quibuscumque polygoni lateribus proximis, inæqualia non esse, existente perimetro maximâ. Nulla igitur proxima inæqualia. Omnino igitur nulla. Omnia igitur æqualia. 2. E. D.

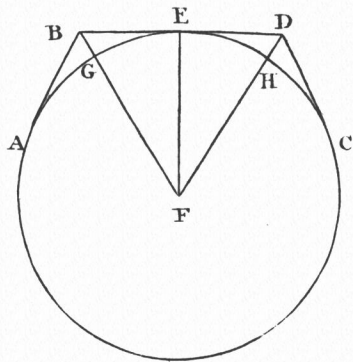
THEOREMA.

T H E O R E M A VI.

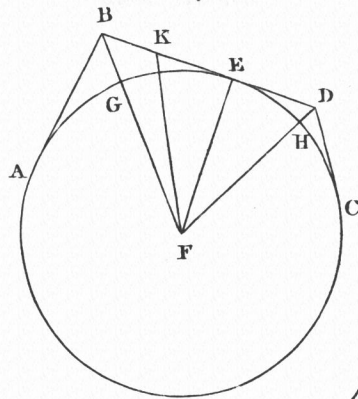
*Polygonorum omnium, lateribus numero datis, dato circulo
inscriptorum, æquilaterum areâ maximum est.*

**Demonstrationem vide apud THOMAM SIMPSON in li-
bello suo de *Figuris Geometricis maximis et minimis.***

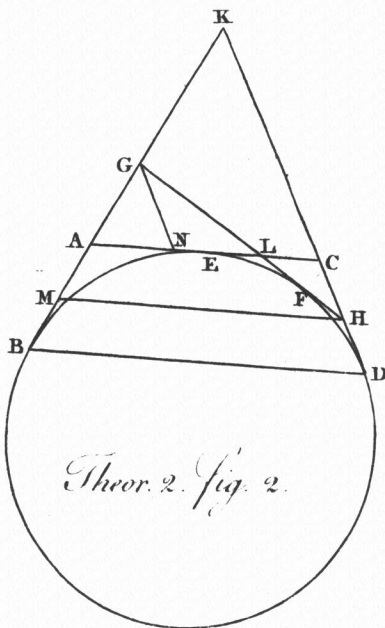
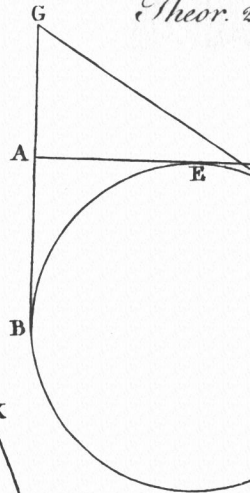
Theor. 1. fig. 1.



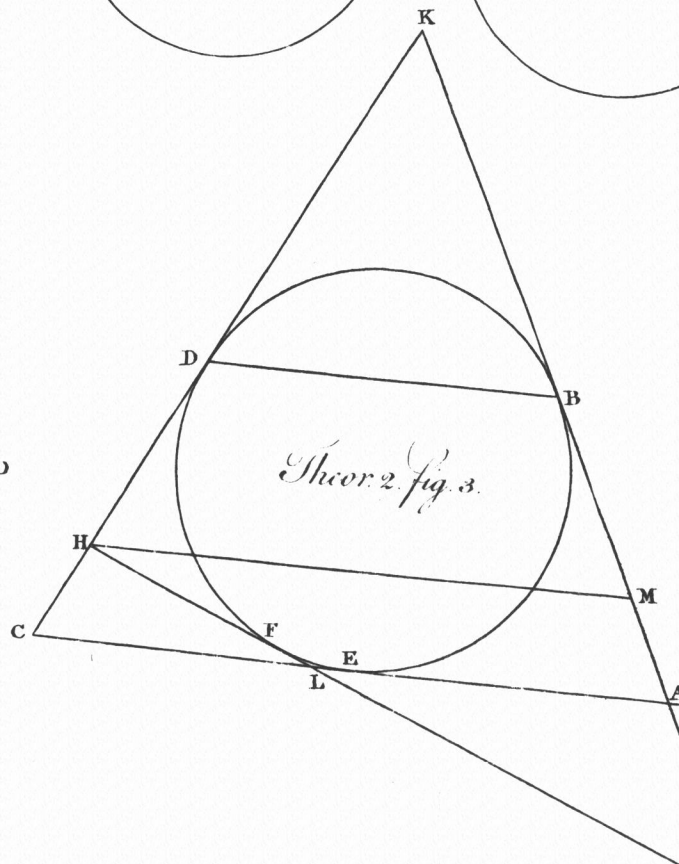
Theor. 1. fig. 2.



Theor. 2.

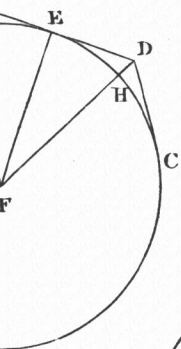


Theor. 2. fig. 2.

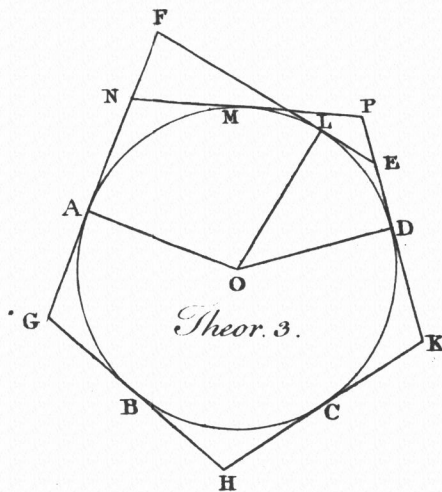
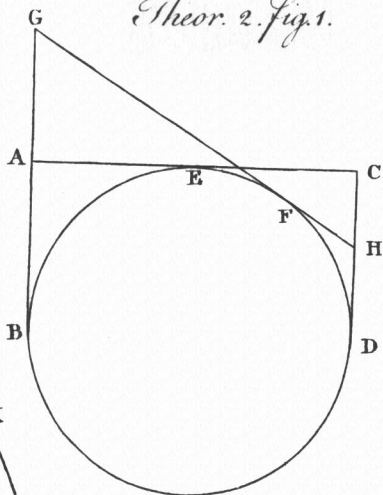


Theor. 2. fig. 3.

fig. 2.

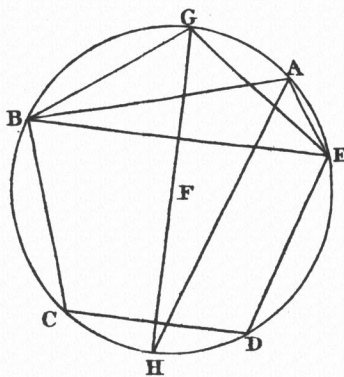


Theor. 2. fig. 1.



Theor. 3.

Theor. 5



Theor. 2. fig. 3.

